ALGUNOS EPIMORFISMOS ENTRE ESPECTROS PRIMOS DE ANILLOS CONMUTATIVOS

Some epimorphisms between prime spectrums of commutative rings

RESUMEN
El espectro primo de un anillo conmutativo con unidad es un espacio topológico compacto T_0; además, el espectro es un espacio T_2 si y solo si, cada ideal primo del anillo es maximal.
Estableceremos una condición sobre los homomorfismos de anillos con espectro T_2 para que los morfismos inducidos en la categoría de espacios compactos Hausdorff sean epimorfismos.

PALABRAS CLAVES: Espectro primo Hausdorff, epimorfismos.

ABSTRACT
The prime spectrum of a commutative ring with unit is a compact topological space T_0. Moreover, the spectrum is a T_2 space if only if, each prime ideal of the ring is a maximal ideal.
We give one condition over the ring's homomorphisms with spectrum T_2, in order that the induced homomorphisms, in the category of compact Hausdorff spaces, are epimorphisms.

KEYWORDS: E*pimorphism, Hausdorff prime spectrum.*

LEONARDO PRIETO S.
Matemático, Ph. D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
lprieto@utp.edu.co

YURI A. POVEDA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

CARLOS ESCUDERO S.
Matemático, Ph.D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
Carlos10@utp.edu.co

1. INTRODUCCION

La topología de Zariski definida sobre el conjunto de ideales primos de un anillo conmutativo con unidad A, permite asociarle al anillo un espacio topológico llamado el espectro primo de A (ver definición 2).

La proposición 3 establece que el espectro primo de cada anillo conmutativo con unidad es un espacio topológico compacto T_0.

De otra parte, cada homomorfismo de anillos conmutativos con unidad, es decir, homomorfismos de anillos que preservan la unidad, induce una función continua entre sus espectros primos (ver proposición 4). De esta forma se puede definir un funtor contravariante entre la categoría de anillos conmutativos con unidad y la categoría de espacios topológicos compactos T_0.

Si en un anillo conmutativo con unidad cada ideal primo es un ideal maximal entonces su espectro primo es un espacio de Hausdorff; la recíproca de esta afirmación también es cierta (la equivalencia se establece en la proposición 7). De esta forma se puede definir un funtor contravariante entre la categoría de anillos conmutativos con unidad para los cuales los ideales primos son maximales y la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 23 de Agosto de 2009

De la proposición 10 se infiere que una función continua en la categoría de espacios Hausdorff es un epimorfismo si su imagen es densa en el codominio.

El resultado principal de este artículo, corolario 11, establece una condición sobre cada homomorfismo de anillos conmutativos con unidad cuyos espectros primos son espacios de Hausdorff, para que su homomorfismo inducido sea un epimorfismo en la categoría de espacios topológicos compactos Hausdorff.

Finalmente se presentan algunos ejemplos de homomorfismos de anillos que satisfacen las condiciones del resultado principal.

El lector debe estar familiarizado con algunas nociones básicas de topología, algebra conmutativa y teoría de categorías; los conceptos utilizados en este trabajo pueden verse por ejemplo en [1],[2],[3] y [4].

2. CONTENIDO

2.1 Nociones básicas

Se presentan algunas nociones y hechos básicos de la teoría del espectro de anillos conmutativos con unidad.

Los enunciados de todas las proposiciones de esta sección corresponden a ejercicios propuestos en [1] son hechos conocidos y se omiten las demostraciones de todos ellos a excepción de las proposiciones 8 y 9 las cuales están relacionadas directamente con el resultado principal.

Dado A un anillo conmutativo con unidad (sólo trabajaremos con este tipo de anillos), denotamos por $Spec(A)$ al conjunto de ideales primos de A. Si $a \in A$, definimos

$$\widehat{a} = \{I \in Spec(A) \mid a \notin I\} .$$

Estos conjuntos de ideales tienen las siguientes propiedades:

Lema 1. (ver [1] pg 13 ejercicio 15) Dado A un anillo conmutativo con unidad se tiene que

(i) Si $a, b \in A$, $\widehat{ab} = \widehat{a} \cap \widehat{b}$

(ii) $\widehat{0} = \varnothing$

(iii) $\widehat{1} = Spec(A)$.

Definición 2. El lema anterior permite definir una topología τ (la topología de Zariski) sobre el $Spec(A)$, cuya base de abiertos está determinada por los conjuntos $\widehat{a}$. Se llama *espectro primo* de *A* al espacio topológico $(Spec(A), \tau)$ que denotaremos con abuso de notación $Spec(A)$.

Proposición 3. **(ver [1] pg 14 ejercicio 18 numeral iv y ejercicio 17 numeral v)** Para cada anillo conmutativo con unidad A, se tiene que $Spec(A)$ es un espacio topológico T_0 compacto.

Notación. Dada una función $f\colon A \to B$ para todo $C \subseteq B$ se notará con $f^!(C)$ al conjunto

$$\{a \in A\colon f(a) \in C\},$$

Consecuentemente $f^!$ denota la función imagen recíproca de f.

Proposición 4. (ver [1], pg 15 numeral (i)) Dado $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos conmutativos que preserva la unidad, entonces $f^!\colon Spec(B) \to Spec(A)$ es una función continua.

Definición 5. El *radical primo* de un anillo *A* está definido por

$$rad(A) = \bigcap_{P \in Spec(A)} P$$

El radial primo de un anillo conmutativo con unidad es el conjunto de sus elementos nilpotentes (ver [1] pg 6, proposición 1.8).

Definición 6. Un anillo *A* se dice *absolutamente plano* si cada ideal principal de A es idempotente, es decir, para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a = ba^2$.

En la literatura se usa que un anillo A es absolutamente plano si cada A- módulo es plano; la definición 6 es equivalente (ver [1] pg 39, ejercicio 27).

Para cada ideal primo *I*, A_I denotará la localización del anillo *A* por *I*. Recordemos que si $S = A - I$ entonces

$$A_I = A[S^{-1}] = S^{-1}A$$

Proposición 7. (ver [1], pg50 ejercicio 11) Dado *A* un anillo conmutativo con unidad, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $A/rad(A)$ es absolutamente plano.

(ii) Todo ideal primo de A es maximal.

(iii) $Spec(A)$ es T_1.

(iv) $Spec(A)$ es T_2.

Proposición 8. Si $f\colon A \to B$ es un morfismo de anillos que preserva la unidad, entonces

$$\overline{f^!(Spec(B))} = \left\{\bigcup\{\widehat{a}|a \in N(f)\}\right\}^c$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} I \in \left\{\bigcup\{\widehat{a}|a \in N(f)\}\right\}^c &\Leftrightarrow a \in N(f) \Rightarrow a \in I \\ &\Leftrightarrow N(f) \subseteq I \end{aligned}$$

Si $I \in f^!(S(B))$, entonces existe $\theta \in Spec(B)$ tal que $f^!(\theta) = I$, como $0 \in \theta$, $f^!(0) = N(f) \subseteq I$, es decir

$$I \in \{\bigcup\{\widehat{a}|a \in N(f)\}\}^c.$$

Consecuentemente se tiene que

$$\overline{f^!(Spec(B))} \subseteq \{\bigcup\{\widehat{a}|a \in N(f)\}\}^c$$

debido a que $\{\bigcup\{\widehat{a}|a \in N(f)\}\}^c$ es cerrado.

Recíprocamente, sea $I \in Spec(A)$ tal que $N(f) \subseteq I$, debemos probar que si $I \in \widehat{a}$, entonces

$$\widehat{a} \cap f^!(Spec(B)) \neq \varnothing.$$